ВЫВОДЪ ОСНОВНЫХЪ ФОРМУЛЪ ТЕОРІИ УПРУГОСТИ.

Н. Е. Жуковскаго.

(Читано въ Математическомъ Обществѣ, 18 сентября, 1884 года).

Въ своихъ Vorlesungen uber Mathematische Physik [1]) Кирхгофъ предлагаетъ простой выводъ основныхъ формулъ теоріи упругости, но этотъ выводъ можетъ быть еще болѣе упрощенъ, если обратить вниманіе на связь между функціями, частныя производныя отъ которыхъ по координатамъ даютъ относительныя перемѣщенія точекъ тѣла и силы упругости.

Вотъ какъ, съ нашей точки зрѣнія, удобно расположить изложеніе.

Беремъ начало прямоугольныхъ осей координатъ x, y, z въ разсматриваемой точкѣ и называемъ чрезъ u, v, w проэкціи перемѣщеній точекъ тѣла на эти оси. Если u_0, v_0, w_0 будутъ проэкціи перемѣщенія начала координатъ, то для точекъ, безконечно близкихъ къ нему, будемъ имѣть формулы:

$$u-u_0=\frac{du}{dx}x+\frac{du}{dy}y+\frac{du}{dz}z,$$

$$v-v_0=\frac{dv}{dx}x+\frac{dv}{dy}y+\frac{dv}{dz}z,$$

---

[1]) Eilfte Vorlesungen, § 7.

$$w-w_0=\frac{dw}{dx}x+\frac{dw}{dy}y+\frac{dw}{dz}z,$$

которымъ можно дать слѣдующій видъ:

$$u-u_0=\frac{du}{dx}x+\frac{1}{2}\left(\frac{dv}{dx}+\frac{du}{dy}\right)y+\frac{1}{2}\left(\frac{du}{dz}+\frac{dw}{dx}\right)z$$

$$+\frac{1}{2}\left(\frac{du}{dz}-\frac{dw}{dx}\right)z-\frac{1}{2}\left(\frac{dv}{dx}-\frac{du}{dy}\right)y,$$

$$v-v_0=\frac{1}{2}\left(\frac{dv}{dx}+\frac{du}{dy}\right)x+\frac{dv}{dy}y+\frac{1}{2}\left(\frac{dw}{dy}+\frac{dv}{dz}\right)z$$

$$+\frac{1}{2}\left(\frac{dv}{dx}-\frac{du}{dy}\right)x-\frac{1}{2}\left(\frac{dw}{dy}-\frac{dv}{dz}\right)z,$$

$$w-w_0=\frac{1}{2}\left(\frac{du}{dz}+\frac{dw}{dx}\right)x+\frac{1}{2}\left(\frac{dw}{dy}+\frac{dv}{dz}\right)y+\frac{dw}{dz}z$$

$$+\frac{1}{2}\left(\frac{dw}{dy}-\frac{dv}{dz}\right)y-\frac{1}{2}\left(\frac{du}{dz}-\frac{dw}{dx}\right)x.$$

Отбрасывая вращательное движеніе, какъ не вліяющее на относительныя перемѣщенія точекъ тѣла, найдемъ для этихъ относительныхъ перемѣщеній ξ, η, ζ формулы:

$$\xi=\frac{du}{dx}x+\frac{1}{2}\left(\frac{dv}{dx}+\frac{du}{dy}\right)y+\frac{1}{2}\left(\frac{du}{dz}+\frac{dw}{dx}\right)z,$$

$$\eta=\frac{1}{2}\left(\frac{dv}{dx}+\frac{du}{dy}\right)x+\frac{dv}{dy}x+\frac{1}{2}\left(\frac{dw}{dy}+\frac{dv}{d}\right)z,$$

$$\zeta=\frac{1}{2}\left(\frac{du}{dz}+\frac{dw}{dx}\right)x+\frac{1}{2}\left(\frac{dw}{dy}+\frac{dv}{dz}\right)y+\frac{dw}{dz}z.$$

Мы видимъ, что ξ, η, ζ суть частныя производныя по координатамъ отъ функціи

$$f = \frac{1}{2}\left\{\frac{du}{dx}x^2 + \frac{dv}{dy}y^2 + \frac{dw}{dz}z^2 + \left(\frac{dw}{dy} + \frac{dv}{dz}\right)yz + \left(\frac{du}{dz} + \frac{dw}{dx}\right)zx + \left(\frac{dv}{dx} + \frac{du}{dy}\right)xy\right\}; \tag{1}$$

такъ что относительныя перемѣщенія точекъ, безконечно близкихъ къ началу координатъ, нормальны къ семейству поверхностей втораго порядка

$$f = const.$$

Оси этихъ поверхностей называются *осями деформацiи* и даютъ направленія реберъ безконечно малаго прямоугольнаго параллелепипеда, который остается прямоугольнымъ и послѣ деформаціи тѣла. Сдѣлавъ это замѣчаніе о деформаціи, обращаемся къ силамъ упругости въ разсматриваемой точкѣ и, доказавъ изъ условія равновѣсія безконечно малаго параллелепипеда попарное равенство тангенціальныхъ силъ, составляемъ на основаніи условія равновѣсія безконечно малаго тетраедра слагающія X, Y, Z упругой силы, дѣйствующей на его сторону, противоположную началу координатъ. Опуская на эту сторону изъ начала перпендикуляръ h и называя чрезъ x, y, z координаты его подошвы, получимъ:

$$X = \frac{1}{h}(N_1 x + T_3 y + T_2 z),$$

$$Y = \frac{1}{h}(T_3 x + N_2 y + T_1 z),$$

$$Z = \frac{1}{h}(T_2 x + T_1 y + N_1 z),$$

гдѣ N_1, N_2, N_3 суть нормальныя, а T_1, T_2, T_3 тангенціальныя силы упругости для плоскостей координатъ. Полагая

$$\varphi = \frac{1}{2}(N_1 x^2 + N_2 y^2 + N_3 z^2 + 2T_1 yz + 2T_2 zx + 2T_3 xy), \tag{2}$$

найдемъ, что

$$X=\frac{1}{h}\frac{d\varphi}{dx},\ Y=\frac{1}{h}\frac{d\varphi}{dy},\ Z=\frac{1}{h}\frac{d\varphi}{dz}.$$

Эти формулы показываютъ, что сила упругости для каждой площадки, безконечно близкой къ началу координатъ, направляется по нормали семейства поверхностей втораго порядка

$$\varphi=const\,;$$

взятой для точки, въ которой перпендикуляръ h пересѣкаетъ площадку. Отсюда слѣдуетъ, что главныя оси упомянутыхъ поверхностей даютъ намъ направленія реберъ прямоугольнаго параллелепипеда, стороны котораго подвержены однимъ нормальнымъ силамъ. Эти оси называются *главными осями упругости*

Понятно, что при изотропномъ тѣлѣ оси деформаціи должны совпадать съ главными осями упругости. Принявъ эти оси за оси координатъ, выразимъ функціи f и φ такимъ образомъ:

$$f=\frac{1}{2}(\varepsilon_1 x^2+\varepsilon_2 y^2+\varepsilon_3 z^2), \tag{3}$$

$$\varphi=\frac{1}{2}(n_1 x^2+n_2 y^2+n_3 z^2), \tag{4}$$

гдѣ ε_1, ε_2, ε_3 суть удлинненія по осямъ деформаціи, а n_1, n_2, n_3—главныя упругія силы.

Допуская, какъ это дѣлаетъ Кирхговъ, что n_1, n_2, n_3 выражаются линейными функціями отъ ε_1, ε_2, ε_2, найдемъ для изотропнаго тѣла:

$$\begin{aligned} n_1&=2\mu\varepsilon_1+\nu\theta\,,\\ n_2&=2\mu\varepsilon_2+\nu\theta\,,\\ n_3&=2\mu\varepsilon_3+\nu\theta\,, \end{aligned} \tag{5}$$

гдѣ ν и μ нѣкоторые коэффиціенты, а

$$\theta = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3$$

есть кубическое расширеніе тѣла въ разсматриваемой точкѣ. Подставляемъ величины n_1, n_2, n_2 изъ формулы (5) въ формулу (4):

$$\varphi = 2\mu f + \frac{1}{2}\nu\theta(x^2 + y^2 + z^2).$$

Переходя опять къ прежнимъ осямъ координатъ, найдемъ по формулѣ (1):

$$\varphi = \frac{1}{2}\left\{\left(2\mu\frac{du}{dx} + \nu\theta\right)x^2 + \left(2\mu\frac{dv}{dy} + \nu\theta\right)y^2 + \left(2\mu\frac{dw}{dz} + \nu\theta\right)z^2\right.$$

$$\left. + 2\mu\left(\frac{dw}{dy} + \frac{dv}{dz}\right)yz + 2\mu\left(\frac{du}{dz} + \frac{dw}{dx}\right)zx + 2\mu\left(\frac{dv}{dx} + \frac{du}{dy}\right)xy\right\}. \quad (6)$$

Сравненіе формулы (6) съ формулою (2) даетъ намъ величины силъ упругости:

$$N_1 = 2\mu\frac{du}{dx} + \nu\theta,$$

$$T_1 = \mu\left(\frac{dw}{dy} + \frac{dv}{dz}\right).$$

Послѣ этого остается еще разъ обратиться къ равновѣсію параллелепипеда, чтобы получить уравненія равновѣсія упругаго тѣла.